Helsingin, Itä-Suomen, Jyväskylän, Oulun, Tampereen ja Turun yliopisto
Matematiikan valintakoe 11.6.2012 klo 10–13

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.
   (a) $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$, (b) $(x+1)(x-2) = 1$, (c) $\sin(\pi^2 x) = 0$,
   (d) $2x^2 - 7 < x^2 - x - 1$, (e) $|x+2| \geqslant x + 1$, (f) $\sqrt{x-2} < 1 - x$.

2. Määritä yhtälön $(a-1)x^2 + ax + 1 = 0$ reaalijuurten lukumäärä vakion $a \in \mathbb{R}$ kaikilla eri arvoilla.

3. (a) Etsi sellaiset vakiot A ja B, että $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2+x}$ kaikilla $x \neq -1$ ja $x \neq 0$.
   (b) Laske $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx$.

4. Heitetään kolme kertaa epäsymmetristä kolikkoa, jolla klaavan todennäköisyys on $3/4$. Laske todennäköisyydet, että saadaan täsmälleen k klaavaa, $k = 0, 1, 2, 3$. Mikä on klaavojen lukumäärän odotusarvo? Anna vastaukset sievennettyinä murtolukuina.

5. Suorakulmaisen kolmion ABC kateettien pituudet ovat $AB = 3$ ja $AC = 4$. Suorakulmio $DEFG$ sijaitsee kolmion ABC sisällä niin, että sivu DE on hypotenuusalla BC, kärki F on kateetilla AC ja kärki G on kateetilla AB.
   (a) Määritä kolmion ABC kärjestä A hypotenuusalle BC piirretyn korkeusjanan pituus. (*3 pistettä*)
   (b) Olkoon janan DE pituus x. Lausu janan DG pituus x:n avulla. (*3 pistettä*)
   (c) Määritä suorakulmion $DEFG$ pinta-alan suurin mahdollinen arvo. (*6 pistettä*)

Helsingin, Itä-Suomen, Jyväskylän, Oulun, Tampereen ja Turun yliopisto
Matematiikan valintakoe 11.6.2012 klo 10–13
Ratkaisut ja pisteytysohjeet

1. Ratkaise seuraavat yhtälöt ja epäyhtälöt.

(a) $\frac{3}{2}x - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}x - \frac{1}{4}$, (b) $(x + 1)(x - 2) = 1$, (c) $\sin(\pi^2 x) = 0$,
(d) $2x^2 - 7 < x^2 - x - 1$, (e) $|x + 2| \geqslant x + 1$ (f) $\sqrt{x - 2} < 1 - x$.

Ratkaisu
(a) Yhtälöstä seuraa $\frac{5}{6}x = \frac{5}{12}$, mistä saadaan vastaus $x = \frac{1}{2}$.

(b) Yhtälö sievennettynä on $x^2 - x - 3 = 0$, josta ratkaisukaavalla $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{13})$.

(c) Yhtälö toteutuu, kun $\pi^2 x = n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$), mistä $x = \frac{n}{\pi}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

(d) Vastaavan yhtälön juuret ovat 2 ja -3. Epäyhtälö toteutuu, kun $-3 < x < 2$.

(e) Kun $x \geq -2$, epäyhtälö saa muodon $x + 2 \geq x + 1$; tämä toteutuu kaikilla $x \geq -2$, koska $2 \geq 1$. Kun $x < -2$, epäyhtälö saa muodon $-x - 2 \geq x + 1$ eli $2x \leq -3$; tämä toteutuu, kun $x \leq -\frac{3}{2}$ eli kaikilla $x < -2$. *Vastaus:* Epäyhtälö toteutuu kaikilla x:n arvoilla.

(f) Täytyy olla $x \geq 2$, jotta epäyhtälön vasen puoli olisi määritelty. Tällöin vasen puoli on ≥ 0, ja oikea puoli $1 - x \leq 1 - 2 = -1 < 0$; siis epäyhtälö ei toteudu millään x:n arvolla.

Pisteytys. Kussakin kohdassa saa järkevästä välivaiheesta (esim. yllä esitetystä) tai perustelusta yhden pisteen, ja sen jälkeen oikeasta vastauksesta toisen pisteen. Pelkästä vastauksesta ei saa pisteitä, ei myöskään virheellisen alun jälkeen tehdyistä oikeista laskutoimituksista.
Jos kohdassa (c) antaa ratkaisuksi vain $x = 0$ tai $x = \frac{1}{\pi}$ tai jonkin muun yksittäisen ratkaisun, ei saa yhtään pistettä.
Kohdassa (e) ensimmäisen pisteen saa, jos esim. poistaa itseisarvot tutkimalla epäyhtälöä erikseen alueissa $x \geq -2$ ja $x < -2$.
Kohdassa (f) ensimmäisen pisteen saa, jos esim. keksii lähteä tutkimaan lausekkeen $1 - x$ merkkiä ehdolla $x \geq 2$ (tämähän tarvittaisiin neliöön korotuksessakin).

2. Määritä yhtälön $(a-1)x^2+ax+1=0$ reaalijuurten lukumäärä vakion $a \in \mathbb{R}$ kaikilla eri arvoilla.

Ratkaisu

Kun $a = 1$, kysymyksessä on ensimmäisen asteen yhtälö $x + 1 = 0$, jolla on yksi reaalijuuri. *(2 pistettä)*

Olkoon sitten $a \neq 1$. Kysymyksessä on toisen asteen yhtälö, jonka diskriminantti on $D = a^2-4a+4$. *(3 pistettä).* Koska $D = (a-2)^2$, on $D = 0$, kun $a = 2$, ja $D > 0$ muulloin. *(3 pistettä).* Kun $a = 2$, on siis reaalijuuria yksi, ja muulloin kaksi. *(3 pistettä).*

Vastaus: Kun $a = 1$ tai $a = 2$, reaalijuuria on yksi, muulloin kaksi. *(1 piste)*

Lisää pisteytyksestä

Jos ei ole huomattu tutkia tapausta $a = 1$ erikseen, voi siis saada enintään 9 pistettä.

3. (a) Etsi sellaiset vakiot A ja B, että $\dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{x-2}{x^2+x}$ kaikilla $x \neq -1$ ja $x \neq 0$.

(b) Laske $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx$.

Ratkaisu. (a) Laventamalla yhtälön vasemman puolen termit samannimisiksi saadaan

$$\begin{aligned}\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} &= \frac{A(x+1)}{x(x+1)} + \frac{Bx}{x(x+1)} = \frac{Ax + A + Bx}{x^2+x}\\ &= \frac{(A+B)x + A}{x^2+x} = \frac{x-2}{x^2+x}.\end{aligned}$$

Vakioiden A ja B on siis toteutettava yhtälöpari

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -2 \\ B = 3. \end{cases}$$

(b) Käyttäen hyväksi kohdassa (a) laskettua osamurtohajotelmaa saadaan

$$\begin{aligned}\int \frac{x-2}{x^2+x}\,dx &= \int \left(-\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}\right) dx = \int -\frac{2}{x}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx\\ &= -2\int \frac{1}{x}\,dx + 3\int \frac{1}{x+1}\,dx\\ &= -2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C.\end{aligned}$$

Pisteytys. Kummastakin kohdasta (a) ja (b) on jaossa 6 pistettä.

Jos kohdassa (a) päätyy oikeaan ratkaisuun $A = -2$ ja $B = 3$, niin yleensä saa 6 pistettä. Myös oikein "arvaaminen" on sallittua, +2 *pistettä ilman perusteluja*, lisäksi sijotus $A = -2$ ja $B = 3$ lausekkeeseen ja lausekkeen toteutumisen toteaminen antaa +4 *pistettä.*
Kohdassa (a) ratkaisu laskemalla kuten yllä esitetty: Alkuunpääsy oikein laventamalla +1 *piste*. Yhtälö $\dfrac{(A+B)x+A}{x^2+x} = \dfrac{x-2}{x^2+x}$ tuottaa +2 *pistettä*, jonka jälkeen yhtälöparin $A + B = 1$ ja $A = -2$ esittämisestä saa +1 *pisteen*. Oikea ratkaisu $A = -2$ ja $B = 3$ tuottaa +2 *pistettä (*+1 *piste molemmista).*

Kohta (b): Kohdassa (a) lasketun hajotelman $-\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{x+1}$ sijoittaminen integroitavaksi funktioksi +1 *piste*. Eteneminen vaiheeseen $\displaystyle\int -\frac{2}{x}\,dx + \int \frac{3}{x+1}\,dx$ tai $\displaystyle -2\int \frac{1}{x}\,dx + 3\int \frac{1}{x+1}\,dx$ antaa +2 *pistettä*. Vastaus $-2\ln|x| + 3\ln|x+1| + C$ tuottaa +3 *pistettä (*= +1 *piste jokaisesta termistä).* Vakion C puuttuminen merkitsee siis 1 pisteen menetystä. Samoin 1 pisteen menettää, jos integraalifunktiosta puuttuu itseisarvomerkkejä.
Jos kohdassa (a) luvut A ja B on ratkaistu väärin tai ei ollenkaan, mutta laskee kohdan (b) integraalin oikein saaden vastaukseksi muotoa $A\ln|x| + B\ln|x+1| + C$ olevan lausekkeen, niin kohdasta (b) annetaan 3 pistettä.

4. Heitetään kolme kertaa epäsymmetristä kolikkoa, jolla klaavan todennäköisyys on $3/4$. Laske todennäköisyydet, että saadaan täsmälleen k klaavaa, $k = 0, 1, 2, 3$. Mikä on klaavojen lukumäärän odotusarvo? Anna vastaukset sievennettyinä murtolukuina.

Ratkaisu. Merkitään

$$X = \text{"kolmessa heitossa saadaan täsmälleen } k \text{ klaavaa"}, \qquad k = 0, 1, 2, 3,$$

jolloin X on binomijakautunut satunnaismuuttuja $X \sim \text{Bin}(3, 3/4)$. Binomitodennäköisyyden kaavan mukaan

$$p_k = P(X = k) = \binom{3}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(1 - \frac{3}{4}\right)^{3-k} = \binom{3}{k}\left(\frac{3}{4}\right)^k\left(\frac{1}{4}\right)^{3-k},$$

kun $k = 0, 1, 2, 3$. Näin ollen

$$\begin{aligned}
p_0 &= P(X = 0) = P(\text{"kolmessa heitossa ei saada yhtään klaavaa"}) \\
&= \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{64}, \\
p_1 &= P(X = 1) = P(\text{"kolmessa heitossa saadaan täsmälleen yksi klaava"}) \\
&= \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 3 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{16} = \frac{9}{64}, \\
p_2 &= P(X = 2) = P(\text{"kolmessa heitossa saadaan täsmälleen kaksi klaavaa"}) \\
&= \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1 = 3 \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{27}{64}, \\
p_3 &= P(X = 3) = P(\text{"kolmessa heitossa saadaan täsmälleen kolme klaavaa"}) \\
&= \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1 \cdot \frac{27}{64} \cdot 1 = \frac{27}{64}.
\end{aligned}$$

Edellä laskettujen todennäköisyyksien perusteella klaavojen lukumäärän odotusarvo on

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{3} k \cdot p_k = 0 \cdot \frac{1}{64} + 1 \cdot \frac{9}{64} + 2 \cdot \frac{27}{64} + 3 \cdot \frac{27}{64} \\
&= \frac{9 + 54 + 81}{64} = \frac{144}{64} = \frac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Vaihtoehtoisesti odotusarvon voi laskea kaavalla

$$EX = np = 3 \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{4}.$$

Pisteytys. Pistetodennäköisyydet $p_k = P(X = k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, jokaisesta +2 *pistettä*, yhteensä +8 *pistettä*. Pienestä laskuvirheestä menettää 1 pisteen, kun periaate on oikein. Vastauksena sieventämätön murtoluku, annetaan vain 1 piste/kohta.

Odotusarvo laskettu oikein, +4 *pistettä*. Kun periaate on oikein, niin laskuvirheestä vähennetään yleensä 2 pistettä, mutta tilanteesta ja virheen vakavuudesta riippuen myös 1 tai 3 pistettä ovat mahdollisia. Sieventämätön vastaus odotusarvona antaa 2 pistettä.

Jos kohdan (a) kaikki pistetodennäköisyydet eivät ole oikein, mutta odotusarvo on laskettu oikealla kaavalla, voi kohdasta (b) saada enintään 2 pistettä.

5. Suorakulmaisen kolmion ABC kateettien pituudet ovat $AB = 3$ ja $AC = 4$. Suorakulmio $DEFG$ sijaitsee kolmion ABC sisällä niin, että sivu DE on hypotenuusalla BC, kärki F on kateetilla AC ja kärki G on kateetilla AB.
   (a) Määritä kolmion ABC kärjestä A hypotenuusalle BC piirretyn korkeusjanan pituus. (*3 pistettä*)
   (b) Olkoon janan DE pituus x. Lausu janan DG pituus x:n avulla. (*3 pistettä*)
   (c) Määritä suorakulmion $DEFG$ pinta-alan suurin mahdollinen arvo. (*6 pistettä*)

Ratkaisu
(a) Olkoon kysytty korkeusjanan pituus h. Lausumalla kolmion ABC pinta-ala kahdella eri tavalla saadaan yhtälö $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot h$. *(2 pistettä).* Tästä $h = \frac{12}{5}$. *(1 piste).*

(b) Olkoon janan DG pituus y. Yhdenmuotoisista kolmioista AGF ja ABC saadaan $(h - y)/x = h/5$. *(2 pistettä).* Tästä ratkaisemalla $y = \frac{12}{5}(1 - \frac{1}{5}x)$. *(1 piste).*

(c) Suorakulmion $DEFG$ pinta-ala on $S(x) = xy = \frac{12}{5}(x - \frac{1}{5}x^2)$. *(2 pistettä).* Derivaatta $S'(x) = \frac{12}{5}(1 - \frac{2}{5}x) = 0$, kun $x = \frac{5}{2}$. *(1+1 pistettä).* Koska x on suljetulla välillä $[0, 5]$, riittää etsiä suurin arvoista $S(0)$, $S(\frac{5}{2})$ ja $S(5)$. *(1 piste).* Koska $S(0) = S(5) = 0$ ja $S(\frac{5}{2}) = 3$, on $DEFG$:n pinta-alan suurin mahdollinen arvo 3. *(1 piste).*

Lisää pisteytyksestä
Kohdissa (a) ja (b) ensimmäiset 2 pistettä annetaan, jos on osattu muodostaa mikä tahansa järkevä yhtälö h:n tai y:n ratkaisemiseksi.
Jos (a):ssa on h:lle saatu väärä arvo, (b)-kohdasta voi silti saada enintään 2 pistettä.
Jos (c)-kohdassa pinta-alan lauseke on väärin, mutta ei poikkea merkittävästi oikeasta (jolloin lausekkeen täytyy ainakin olla toisen asteen polynomi), voi (c)-kohdasta vielä saada enimmillään 4 pistettä. Jos toisen asteen polynomin derivoi väärin, ei sen jälkeen kerry pisteitä.
Missään kohdassa pelkistä vastauksista (arvauksista) ei anneta pisteitä.