Jyväskylän yliopisto ja Tampereen yliopisto
Matematiikan valintakoe 8.6.2015

---

1. **a)** Poista itseisarvomerkit: $|e - |e - 4||$.

b) Esitä lauseke muodossa, jossa neliöjuuri ei esiinny nimittäjässä: $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$.

c) Ratkaise yhtälö $\frac{2}{x} - x = 1$.

d) Ratkaise yhtälö $\ln(6x^2) - \ln(2x) = 1$.

e) Ratkaise epäyhtälö $\sqrt{x+1} < x - 1$.

2. **a)** Määritä funktion

$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x + 1}\right)$$

toisen derivaatan arvo kohdassa $x = 0$.

b) Laske integraalin

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin(5x) + \cos(3x))\, dx.$$

tarkka arvo.

3. Vektoreilla $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ on sama pituus ja niiden välinen kulma on $\pi/2$. Laske vektoreiden $\bar{a}$ ja $\bar{a} - \sqrt{3}\,\bar{b}$ välinen kulma. Piirrä myös kuva, jossa näkyvät vektorit $\bar{a}$, $\bar{b}$ ja $\bar{a} - \sqrt{3}\,\bar{b}$.

4. Pikku-Liisa saa 4 veistä ja 4 haarukkaa pöydän kattamiseksi 4 hengelle. Liisa jakaa umpimähkään kullekin ruokailijalle kaksi ruokailuvälinettä. Mikä on todennäköisyys, että kaikki saavat veitsen ja haarukan?

5. Olkoon f sellainen positiivisten kokonaislukujen joukossa määritelty funktio, että $f(2) = 2^{2/3}$, $f(3) = 1/\sqrt{2}$ ja

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

aina, kun m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja.

a) Määritä $f(1)$.

b) Määritä $f(12)$. Esitä vastaus supistetussa muodossa.

Ratkaisut

1a. Koska $e < 4$, on $|e-4| = 4-e$ [1 p.]. Edelleen, koska $4-e < 2 < e$, on $|e-(4-e)| = e-(4-e) = 2e-4$ [2 p.].

1b.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-\sqrt{2}} &= \frac{(3+\sqrt{2})\cdot 1}{(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})} && \text{[1 p.]}\\ &= \frac{3+\sqrt{2}}{3^2-\sqrt{2}^2} = \frac{3+\sqrt{2}}{7} && \text{[2 p.].}\end{aligned}$$

1c. Kertomalla x:llä ($x \neq 0$) ja siirtämällä termejä puolelta toiselle saadaan yhtäpitävä yhtälö $x^2+x-2=0$ [1 p.]. Tästä saadaan ratkaisut:

$$\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases} \qquad \text{[2 p.].}$$

1d. $\ln(6x^2)-\ln(2x) = \ln(\frac{6x^2}{2x}) = \ln(3x)$, joten yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $\ln(3x) = 1$ [1 p.]. Koska $1 = \ln(e)$ tämä on yhtäpitävä yhtälön $3x = e$ kanssa, josta saadaan ratkaisuksi $x = \frac{e}{3}$ [2 p.].

1e. Jotta epäyhtälön vasen puoli on määritelty, on oltava $x \geq -1$. Koska $\sqrt{x+1} \geq 0$, on edelleen $x-1 > 0$ eli $x > 1$. Korottamalla epäyhtälön molemmat puolet toiseen, saadaan epäyhtälö $x+1 < (x-1)^2 = x^2-2x+1$, joka on yhtäpitävä epäyhtälön $x^2-3x > 0$ kanssa [1 p.]. Polynomin $x^2-3x = x(x-3)$ 0-kohdat ovat 0 ja 3. Koska kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, epäyhtälön $x^2-3x > 0$ ratkaisu on $x < 0$ tai $x > 3$. Näistä edellinen ei kelpaa alkuperäisen epäyhtälön ratkaisuksi, sillä jos $x < 0$, on $x-1 < -1 < \sqrt{x+1}$. Ratkaisu on siis $x > 3$ [2 p.].

2a. Käyttämällä derivointikaavoja saadaan

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{e^x}{e^x+1}}\cdot D\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) && \text{[1 p.]}\\ &= \frac{e^x+1}{e^x}\cdot\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2} && \text{[2 p.]}\\ &= \frac{e^x+1}{e^x}\cdot\frac{e^x}{(e^x+1)^2}\\ &= \frac{1}{e^x+1}\\ &= (e^x+1)^{-1}\end{aligned}$$

[3 p.] ja edelleen

$$f''(x) = -1\cdot(e^x+1)^{-2}\cdot D\left(e^x+1\right) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ [4 p.]. Siis

$$f''(0) = -\frac{e^0}{(e^0+1)^2} = -\frac{1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

[5 p.]

Toinen mahdollisuus on käyttää ensin logaritmin laskusääntöjä, jolloin

$$f(x) = \ln(e^x) - \ln(e^x+1) = x - \ln(e^x+1)$$

[1 p.] ja

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{e^x+1} \cdot D\,(e^x+1) && \text{[2 p.]} \\ &= 1 - \frac{e^x}{e^x+1} \end{aligned}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$ [3 p.]. Siis

$$f''(x) = -\frac{e^x(e^x+1) - e^x \cdot e^x}{(e^x+1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

kaikilla $x \in \mathbf{R}$, [4 p.] joten

$$f''(0) = -\frac{e^0}{(e^0+1)^2} = -\frac{1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}.$$

[5 p.]

2b. Suoraviivainen integrointi tuottaa tulokseksi

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin(5x) + \cos(3x))\,dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(-\frac{1}{5} \cdot 5 \cdot (-\sin(5x)) + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \cos(3x)\right) dx && \text{[1 p.]} \\ &= -\frac{1}{5} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 5 \cdot (-\sin(5x))\,dx + \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 3 \cdot \cos(3x)\,dx \\ &= -\frac{1}{5} \Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(5x)\,dx + \frac{1}{3} \Big/_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(3x)\,dx && \text{[3 p.]} \\ &= -\frac{1}{5}\left(\cos(5\pi) - \cos\frac{5\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\sin(3\pi) - \sin\frac{3\pi}{2}\right) && \text{[4 p.]} \\ &= -\frac{1}{5}(-1-0) + \frac{1}{3}(0-(-1)) \\ &= -\frac{1}{5} \cdot (-1) + \frac{1}{3} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{5} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{8}{15}. && \text{[5 p.]} \end{aligned}$$

Vain toinen yhteenlaskettavista on integroitu oikein: -1 p.

3. Aluksi todetaan:

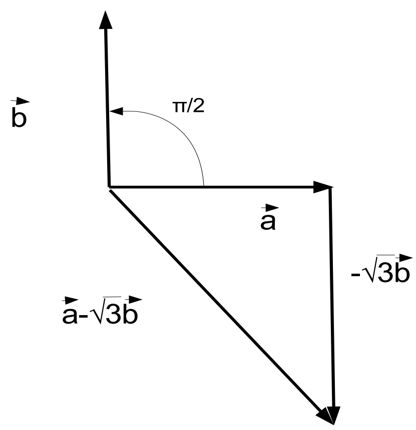
$$\begin{aligned}\bar{a}\cdot\bar{b} &= |\bar{a}||\bar{b}|\cos(\bar{a},\bar{b})\\ &= |\bar{a}|^2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= 0. \quad \text{[2 p.]}\end{aligned}$$

Tästä saadaan

$$\begin{aligned}\cos(\bar{a},\bar{a}-\sqrt{3}\,\bar{b}) &= \frac{\bar{a}\cdot(\bar{a}-\sqrt{3}\,\bar{b})}{|\bar{a}||\bar{a}-\sqrt{3}\,\bar{b}|} \quad \text{[4 p.]}\\ &= \frac{\bar{a}\cdot\bar{a}-\sqrt{3}\,\bar{a}\cdot\bar{b}}{|a|\sqrt{(\bar{a}-\sqrt{3}\,\bar{b})\cdot(\bar{a}-\sqrt{3}\,\bar{b})}}\\ &= \frac{|\bar{a}|^2}{|\bar{a}|\sqrt{|\bar{a}|^2-2\sqrt{3}\,\bar{a}\cdot\bar{b}+3|\bar{b}|^2}}\\ &= \frac{|\bar{a}|^2}{|\bar{a}||\bar{a}|\sqrt{4}}\\ &= \frac{1}{2} \quad \text{[7 p.].}\end{aligned}$$

Kulmaksi saadaan siis

$$(\bar{a},\bar{a}-\sqrt{3}\,\bar{b}) = \frac{\pi}{3} \quad \text{[9 p.].}$$



Kuva 1: Vektorit $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ sekä niistä muodostetut vektorit $-\sqrt{3}\,\bar{b}$ ja $\bar{a}-\sqrt{3}\,\bar{b}$. [10 p.]

4. Tehtävän voi ratkaista monilla eri tavoilla; erityisesti alkeistapauksiin voi sisällyttää informaatiota, joka ei vaikuta lopputulokseen.

Tapa 1. Ruokailuvälineille on varattu kahdeksan paikkaa, joista kunkin lautasen vieressä kaksi. Alkeistapauksia ovat haarukoiden mahdolliset sijoittelut näille paikoille, joita on

$$\binom{8}{4} = \frac{(8)_4}{4!} = \frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 70 \quad \text{kappaletta [3 p.].}$$

Suotuisia tapauksia ovat ne, joissa jokaisen lautasen vieressä on haarukka joko vasemmalla tai oikealla puolella. Niitä on siis

$$2^4 = 16 \quad \text{kappaletta [6 p.].}$$

Kysytty todennäköisyys on

$$\frac{16}{70} = \frac{8}{35} \quad \text{[10 p.].}$$

Tapa 2. Käytetään ehdollista odennäköisyyttä. Ruokailijat olkoot A, B, C ja D, ja S_A tapahtuma, että A saa haarukan ja veitsen; S_B, S_C ja S_D vastaavasti. Kysytty todennäköisyys on

$$p = \mathbb{P}(S_A) \cdot \mathbb{P}(S_B \mid S_A) \cdot \mathbb{P}(S_C \mid S_A \cap S_B) \cdot \mathbb{P}(S_D \mid S_A \cap S_B \cap S_C) \quad \text{[2 p.].}$$

A saa ensin jonkin ruokailuvälineen ja suotuisassa tapauksessa toisentyyppisen (4 mahdollisuutta) ruokailuvälineen 7 jäljellä olevasta. Siis $\mathbb{P}(S_A) = \frac{4}{7}$ [4 p.]. Jos A on saanut oikeanlaisen parin, niin jäljellä on 6 ruokailuvälinettä, ja samanlainen päättely tuottaa tuloksen $\mathbb{P}(S_B \mid S_A) = \frac{3}{5}$ [6 p.]. Vastaavasti $\mathbb{P}(S_C \mid S_A \cap S_B) = \frac{2}{3}$, ja $\mathbb{P}(S_D \mid S_A \cap S_B \cap S_C) = \frac{1}{1}$ [8 p.]. Siis

$$p = \frac{4}{7} \cdot \frac{\cancel{3}}{5} \cdot \frac{2}{\cancel{3}} \cdot 1 = \frac{8}{35} \quad \text{[10 p.].}$$

5a. Kun asetetaan $m = 1$ ja $n = 2$, saadaan $f(2) = f(1)f(2)$. [2 p.] Näin ollen $f(1) = 1$, [4 p.] koska $f(2) \neq 0$. [5 p.]
(Päättely "$f(1) = f(1)f(1)$; siis $f(1) = 0 \vee f(1) = 1$"tuottaisi yksistään [2 p.])

Vastaus $f(1) = 1$ ilman perusteluja [2 p.].

5b. Kun asetetaan $m = 2$ ja $n = 6$, saadaan $f(12) = f(2 \cdot 6) = f(2)f(6)$. [1 p.] Siis $f(12) = 2^{2/3}f(6)$. [2 p.] Kun asetetaan $m = 2$ ja $n = 3$, saadaan $f(6) = f(2 \cdot 3) = f(2)f(3)$. Siis $f(12) = f(2)f(2)f(3)$. [3 p.] Näin ollen $f(12) = 2^{2/3}2^{2/3}/\sqrt{2}$, [4 p.] joten $f(12) = 2^{2/3}2^{2/3}2^{-1/2} = f(12) = 2^{5/6}$. [5 p.]
(b-kohdan alku voi mennä myös: $f(12) = f(4 \cdot 3) = f(4)f(3) = f(2 \cdot 2)f(3) = f(2)f(2)f(3)$.)