Helsingin, Itä-Suomen, Jyväskylän, Oulun, Tampereen ja Turun yliopisto
Matematiikan valintakoe 10.6.2013 klo 10-13

1. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt ja yhtälö:
   a)
   $$\frac{-x+3}{x^2+9} \geq 0,$$
   b)
   $$\log_2(2x) \leq 7,$$
   c)
   $$x^2 + 3|x| - 4 = 0.$$

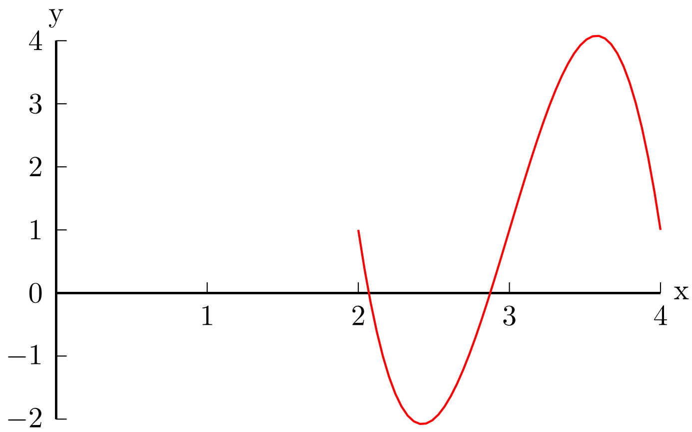
2. Määrää kaikki ne suoraa $2x - 3y = 4$ vastaan kohtisuorassa olevat suorat, joiden x- ja y-akselin kanssa rajaaman kolmion pinta-ala on 3.

3. Funktiolla f on ääriarvo kohdassa $x = 2$ ja $f(x) = x^3 - ax^2 + 3$, missä a on reaaliluku. Ratkaise vakio a. Tämän jälkeen määrää funktion f paikalliset ja absoluuttiset ääriarvot (minimit ja maksimit), kun $x \in [-1, \infty[$.

4. Matti on tehnyt ympyränmuotoisen tikkataulun, jonka halkaisija on 1 metri. Taulusssa keskiympyrän halkaisija on 20 senttimetriä ja siihen osumisesta saa 5 pistettä. Tämän lisäksi taulussa on neljä 10 senttimetrin levyistä pisterengasta, joista saatavat pisteet ovat järjestyksessä 1, 2, 3 ja 4 ympyrän ulkokehältä sisäänpäin mentäessä. Oletetaan, että heitetty tikka osuu tauluun ja pistemäärän todennäköisyys on suoraan verrannollinen pistemäärää vastaavaan alueen pinta-alaan. Laske jokaisen mahdollisen pistemäärän todennäköisyys ja saatavan pistemäärän odotusarvo, kun tikkaa heitetään yhden kerran.

Tehtävä 5 kääntöpuolella!

5. a) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva ja jaksollinen funktio, jonka jakso on 2, eli $f(x) = f(x+2)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Tiedetään, että $\int_0^4 f(x)\,dx = 4$ ja $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$. Lisäksi funktion f kuvaaja tiedetään, kun $x \in [2,4]$ (Kuva 1). Laske $\int_0^1 f(x)\,dx$ ja $\int_0^2 f(x)\,dx$.



Kuva 1: Funktion f kuvaaja, kun $x \in [2,4]$.

b) Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, jonka jakso on 2. Tiedetään lisäksi, että g on pariton funktio eli $g(-x) = -g(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Mitä on $g(-3)$?

Helsingin, Itä-Suomen, Jyväskylän, Oulun, Tampereen ja Turun yliopisto
Matematiikan valintakoe 10.6.2013 klo 10-13
Ratkaisut ja pisteytysohjeet

1. Ratkaise seuraavat epäyhtälöt ja yhtälö:

a)
$$\frac{-x+3}{x^2+9} \geq 0,$$
b)
$$\log_2(2x) \leq 7,$$
c)
$$x^2 + 3|x| - 4 = 0.$$

Ratkaisu. a) 1. tapa: Nyt $x^2 + 9 > 0$ kaikilla reaaliluvuilla x. (1 p)
Näin ollen
$$\begin{aligned} &\frac{-x+3}{x^2+9} \geq 0 \\ \Leftrightarrow\ & -x+3 \geq 0 && \text{(2p)} \\ \Leftrightarrow\ & \quad x \leq 3. && \text{(1p)} \end{aligned}$$

2. tapa:
$$\begin{aligned} &\frac{-x+3}{x^2+9} \geq 0 \,\|\cdot (x^2+9) > 0 && \text{(1p kertojan positiivisuudesta)} \\ \Leftrightarrow\ & -x+3 \geq 0 && \text{(2p)} \\ \Leftrightarrow\ & \quad x \leq 3. && \text{(1p)} \end{aligned}$$

3. tapa: Merkkikaavio:

	3	
$-x+3$	$++$	$--$
x^2+9	$++$	$++$
$\frac{-x+3}{x^2+9}$	$++$	$--$

Pisteet osoittajan, nimittäjän ja osamäärän oikeista merkeistä (yht. 3p).
Nyt
$$\frac{-x+3}{x^2+9} \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3. \quad \text{(1p)}$$

b) 1. tapa: Määrittelyehto: $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. (1p)

$$\begin{aligned}
&\log_2(2x) \leq 7 \\
\Leftrightarrow &\log_2(2x) \leq \log_2 2^7 \parallel \log_2 x \text{ aidosti kasvava} \quad \text{(1p)} \\
\Leftrightarrow &2x \leq 2^7 \parallel : 2 \quad \text{(1p, kun aid. kasvavuus näkyvissä)} \\
\Leftrightarrow &x \leq 2^6 \quad \text{(1p)}
\end{aligned}$$

Näin ollen $0 < x \leq 2^6$.
2. tapa: Määrittelyehto: $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$. (1p)

$$\begin{aligned}
&\log_2(2x) \leq 7 \parallel 2^x \text{ aidosti kasvava} \\
\Leftrightarrow &2^{\log_2(2x)} \leq 2^7 \quad \text{(1p, kun aid. kasvavuus näkyvissä)} \\
\Leftrightarrow &2x \leq 2^7 \parallel : 2 \quad \text{(1p)} \\
\Leftrightarrow &x \leq 2^6 \quad \text{(1p)}
\end{aligned}$$

Näin ollen $0 < x \leq 2^6$.

c) 1. tapa: Osavälijako:
1° $x < 0 : x^2 + 3(-x) - 4 = 0$. (1p)

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ tai } x = 4$$

Valitaan tarkasteltavalle osavälille kuuluva ratkaisu:

$$x = -1 \quad \text{(1p)}$$

2° $x \geq 0 : x^2 + 3x - 4 = 0$. (1p)

$$x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ tai } x = -4$$

Valitaan tarkasteltavalle osavälille kuuluva ratkaisu:

$$x = 1 \quad \text{(1p)}$$

2. tapa:

$$\begin{aligned}
x^2 + 3|x| - 4 = 0 &\Leftrightarrow |x|^2 + 3|x| - 4 = 0 \quad \text{(1p)} \\
&\Leftrightarrow |x| = 1 \text{ tai } |x| = -4 \quad \text{(1p)}
\end{aligned}$$

Hylätään $|x| = -4$ negatiivisena. (1p)
$x^2 + 3|x| - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ tai $x = 1$ (1p)

2. Määrää kaikki ne suoraa $2x - 3y = 4$ vastaan kohtisuorassa olevat suorat, joiden x- ja y-akselin kanssa rajaaman kolmion pinta-ala on 3.

Ratkaisu. Koska

$$\begin{aligned} &2x - 3y = 4 \\ \Leftrightarrow &y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

niin annetun suoran kulmakerroin $k_1 = \frac{2}{3}$. (1p)
Kohtisuorassa olevan suoran kulmakerroin k_2 toteuttaa ehdon $k_1 \cdot k_2 = -1$ (1p), joten

$$\frac{2}{3}k_2 = -1 \Leftrightarrow k_2 = -\frac{3}{2}. \quad \text{(1p)}$$

Kohtisuorassa olevan suoran yhtälö: $y = -\frac{3}{2}x + b$. (1p)

Huomautus. Jos käyttää suunta- tai normaalivektoreita, niin pisteytys samalla tavalla kuin kulmakerrointa käyttämällä: Alkuperäistä suoraa vastaava vektori (1p), kohtisuorien vektorien pistetulo on nolla (1p), haluttua suoraa vastaava vektori (1p), halutun suoran yhtälö (1p).

1. tapa: Suoran ja y-akselin leikkauspiste: Koska $x = 0$, niin $y = b$, joten leikkauspiste on $(0, b)$. (1p)
Suoran ja x-akselin leikkauspiste: Koska $y = 0$, niin $x = \frac{2}{3}b$, joten leikkauspiste on $(\frac{2}{3}b, 0)$. (1p)
Kolmion pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= \frac{|b| \cdot \frac{2}{3}|b|}{2} \quad \text{(2p)} \\ &= \frac{1}{3}b^2. \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

Toisaalta $A = 3$, joten

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}b^2 = 3 \\ \Leftrightarrow &b^2 = 9 \\ \Leftrightarrow &b = -3 \vee b = 3. \quad \text{(2p)} \end{aligned}$$

Täten $y = -\frac{3}{2}x - 3$ tai $y = -\frac{3}{2}x + 3$. (1p)

Huomautus. Jos pinta-alan kaavassa ei ole itseisarvoja, niin voi saada maksimissaan 9 pistettä, vaikka vastaus olisikin vahingossa oikein. Loppupään pisteytys menee silloin näin: Pinta-ala ilman itseisarvoja (1p), ratkaisuna molemmat b:n arvot tai vain toinen (1p), lopullisena vastauksena molemmat suorat tai vain toinen (1p).

2. tapa: Pinta-ala voidaan laskea integraalin avulla. Suoran ja x-akselin leikkauspiste: Koska $y = 0$, niin $x = \frac{2}{3}b$, joten leikkauspiste on $(\frac{2}{3}b, 0)$. (1p) Kun $b \geq 0$, niin kolmion pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{2}{3}b} (-\frac{3}{2}x + b)\, dx. \quad \text{(1p)} \\ &= \Big/_{0}^{\frac{2}{3}b} -\frac{3}{4}x^2 + bx = -\frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{3}b^2 = \frac{1}{3}b^2. \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

Vastaavasti, kun $b < 0$, niin kolmion pinta-ala

$$\begin{aligned} A &= -\int_{\frac{2}{3}b}^{0} (-\frac{3}{2}x + b)\, dx. \quad \text{(1p)} \\ &= -\Big/_{\frac{2}{3}b}^{0} -\frac{3}{4}x^2 + bx = -\frac{1}{3}b^2 + \frac{2}{3}b^2 = \frac{1}{3}b^2. \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

Koska $A = 3$, niin saadaan

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3}b^2 = 3 \\ \Leftrightarrow &b^2 = 9 \\ \Leftrightarrow &b = -3 \lor b = 3. \quad \text{(2p)} \end{aligned}$$

Täten $y = -\frac{3}{2}x - 3$ tai $y = -\frac{3}{2}x + 3$. (1p)

Huomautus. Jos ei ole laskenut kuin toisen integraalin, niin voi saada maksimissaan 9 pistettä, vaikka vastaus olisikin vahingossa oikein. Tällöin menettää toisen integraalin puuttumisesta 2 pistettä ja vakion b ratkaisuista jaossa olevista pisteistä toisen, vaikka molemmat ratkaisut olisivatkin mukana.

3. Funktiolla f on ääriarvo kohdassa $x = 2$ ja $f(x) = x^3 - ax^2 + 3$, missä a on reaaliluku. Ratkaise vakio a. Tämän jälkeen määrää funktion f paikalliset ja absoluuttiset ääriarvot (minimit ja maksimit), kun $x \in [-1, \infty[$.

Ratkaisu. Nyt f on jatkuva ja derivoituva. Koska $x = 2$ on paikallinen ääriarvokohta, niin sen pitää olla derivaatan nollakohta (välttämätön ehto muttei riittävä).
Nyt $f'(x) = 3x^2 - 2ax$. (2p)
Näin ollen

$$\begin{aligned} & f'(2) = 0 \\ \Leftrightarrow & 3 \cdot 2^2 - 2a \cdot 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & a = 3. \quad \text{(2p)} \end{aligned}$$

Nyt $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Onko pisteessä $x = 2$ ääriarvokohta? Kulkukaavio pisteen $x = 2$ läheisyydessä:

$$\begin{array}{r|c|c}
 & \multicolumn{2}{c}{2} \\ \hline
3x & ++ & ++ \\ \hline
x-2 & -- & ++ \\ \hline
f'(x) & -- & ++ \\ \hline
f(x) & \searrow & \nearrow
\end{array}. \quad \text{(1p)}$$

Koska derivaatan merkki vaihtuu pisteessä $x = 2$, niin funktiolla f on pisteessä $x = 2$ paikallinen ääriarvokohta, joka on minimikohta, kun $a = 3$. (1p)

Huomautus. Ääriarvokohdan perustelu voidaan tehdä myös toista derivaattaa käyttäen tai derivaatan arvojen tarkastelulla pisteen $x = 2$ läheisyydessä, joka kyllä vaatii derivaatan toisen nollakohdan $x = 0$ tietämisen.

Edellä saatiin $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$.

Mahdolliset paikalliset ääriarvokohdat, kun $x \geq -1$, ovat derivaatan nollakohdissa ja välin päätepisteessä $x = -1$. Derivaatan nollakohdat:

$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow & 3x^2 - 6x = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \vee x = 2. \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

Kulkukaavio:

$$\begin{array}{r|c|c|c}
 & -1 \qquad 0 & & 2 \\ \hline
3x & -- & ++ & ++ \\ \hline
x-2 & -- & -- & ++ \\ \hline
f'(x) & ++ & -- & ++ \\ \hline
f(x) & \nearrow & \searrow & \nearrow
\end{array}. \quad \text{(1p)}$$

$f(-1) = -1$ paikallinen minimiarvo (1p)
$f(0) = 3$ paikallinen maksimiarvo (1p)
$f(2) = -1$ paikallinen minimiarvo (2p, jos aikaisemmin ei perustellut, että $x = 2$ on ääriarvokohta eli aikaisemmin 2 pistettä jäi saamatta)
$f(-1) = f(2) = -1$ absoluuttinen minimiarvo (1p)
Koska $\lim_{x\to\infty} x^3 - 3x^2 + 3 = \infty$, niin absoluuttista maksimiarvoa ei ole olemassa. (1p)

4. Matti on tehnyt ympyränmuotoisen tikkataulun, jonka halkaisija on 1 metri. Taulusssa keskiympyrän halkaisija on 20 senttimetriä ja siihen osumisesta saa 5 pistettä. Tämän lisäksi taulussa on neljä 10 senttimetrin levyistä pisterengasta, joista saatavat pisteet ovat järjestyksessä 1, 2, 3 ja 4 ympyrän ulkokehältä sisäänpäin mentäessä. Oletetaan, että heitetty tikka osuu tauluun ja pistemäärän todennäköisyys on suoraan verrannollinen pistemäärää vastaavaan alueen pinta-alaan. Laske jokaisen mahdollisen pistemäärän todennäköisyys ja saatavan pistemäärän odotusarvo, kun tikkaa heitetään yhden kerran.

   Ratkaisu. Pistemäärän 5 todennäköisyys:

$$\begin{aligned} p_5 &= \frac{\pi \cdot (10cm)^2}{\pi \cdot (50cm)^2} \quad \text{(1p)} \\ &= \frac{100}{2500} = \frac{1}{25}. \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

   Pistemäärän 4 todennäköisyys:

$$\begin{aligned} p_4 &= \frac{\pi \cdot (20cm)^2 - \pi \cdot (10cm)^2}{\pi \cdot (50cm)^2} \quad \text{(1p)} \\ &= \frac{400 - 100}{2500} = \frac{3}{25}. \quad \text{(1p)} \end{aligned}$$

   Pistemäärän 3 todennäköisyys:

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{\pi \cdot (30cm)^2 - \pi \cdot (20cm)^2}{\pi \cdot (50cm)^2} \quad \text{(1p)} \\ &= \frac{900 - 400}{2500} = \frac{5}{25} \quad \text{(1p)} \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

Pistemäärän 2 todennäköisyys:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{\pi \cdot (40cm)^2 - \pi \cdot (30cm)^2}{\pi \cdot (50cm)^2} \quad (1p) \\ &= \frac{1600 - 900}{2500} = \frac{7}{25}. \quad (1p) \end{aligned}$$

Pistemäärän 1 todennäköisyys:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\pi \cdot (50cm)^2 - \pi \cdot (40cm)^2}{\pi \cdot (50cm)^2} \quad (1p) \\ &= \frac{2500 - 1600}{2500} = \frac{9}{25}. \quad (1p) \end{aligned}$$

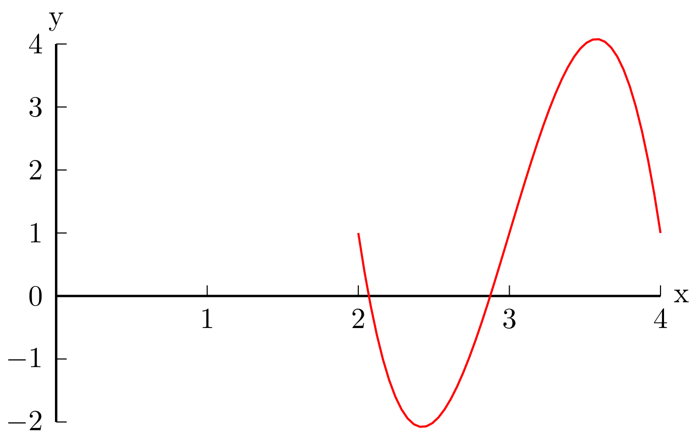
Huomautus. Jos käyttää väärää pinta-alan kaavaa, niin saa joka todennäköisyydestä pisteen, jos on sieventänyt saamansa ratkaisut. Vastaavasti, jos esimerkiksi nimittäjä on oikein ja osoittaja laskettu ympyrän pinta-alana erotusten sijaan, saa joka todennäköisyydestä pisteen, jos on sieventänyt saamansa ratkaisut.

Odotusarvo:

$$\begin{aligned} EX &= \sum_{k=1}^{5} k \cdot p_k \\ &= 1 \cdot \frac{9}{25} + 2 \cdot \frac{7}{25} + 3 \cdot \frac{5}{25} + 4 \cdot \frac{3}{25} + 5 \cdot \frac{1}{25} \quad (1p) \\ &= \frac{9 + 14 + 15 + 12 + 5}{25} = \frac{55}{25} = \frac{11}{5}. \quad (1p) \end{aligned}$$

Huomautus. Jos odutusarvon on laskenut ja sieventänyt oikein aikaisemmin saamillaan todennäköisyyksillä, jotka voivat olla vääriäkin, saa täydet kaksi pistettä.

5. a) Olkoon $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuva ja jaksollinen funktio, jonka jakso on 2, eli $f(x) = f(x+2)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Tiedetään, että $\int_0^4 f(x)\,dx = 4$ ja $\int_1^4 f(x)\,dx = 5$. Lisäksi funktion f kuvaaja tiedetään, kun $x \in [2,4]$ (Kuva 1). Laske $\int_0^1 f(x)\,dx$ ja $\int_0^2 f(x)\,dx$.
   b) Olkoon $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jaksollinen funktio, jonka jakso on 2. Tiedetään lisäksi, että g on pariton funktio eli $g(-x) = -g(x)$ kaikilla reaaliluvuilla x. Mitä on $g(-3)$?



Kuva 1: Funktion f kuvaaja, kun $x \in [2, 4]$.

Ratkaisu. a) Integraali

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx, \quad \text{(1p)}$$

joten

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^4 f(x)\,dx - \int_1^4 f(x)\,dx = 4 - 5 = -1. \quad \text{(1p)}$$

Merkitään suorien $x = 2$ ja $x = 4$, funktion f sekä x-akselin yhdessä rajaamien alueiden pinta-aloja A_1, A_2 ja A_3 (järjestyksessä origosta päin katsottaessa, jolloin A_2 on x-akselin alapuolella).
Integraali $\int_2^4 f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3$. (1p)
Jaksollisuuden nojalla $\int_0^2 f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 = \int_2^4 f(x)\,dx$. (1p)

Huomautus. Edelliset 2 pistettä saa, jos on perustellut, että integraalit ovat yhtä suuret. Perusteluksi riittää, jos sanoo, että jaksollisen funktion integraali yli jakson pituuden on vakio. Jos perustelu on puutteellinen tai puuttuu, saa yhden pisteen.

Koska

$$4 = \int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx = 2\int_0^2 f(x)\,dx, \quad \text{(1p)}$$

niin $\int_0^2 f(x)\,dx = 2$. (1p)

b) Nyt parittomuuden nojalla $g(-3) = -g(3)$. (1p)
Toisaalta jaksollisuuden nojalla

$$g(-3) = g(-3+2) = g(-1) = g(-1+2) = g(1) = g(1+2) = g(3). \quad (2p)$$

Nyt $g(3) = -g(3)$. (1p)
Näin ollen

$$2g(3) = 0 \Leftrightarrow g(3) = 0. \quad (1p)$$

Täten $g(-3) = g(3) = 0$. (1p)